671. 非可換群ノ双對定理ニ付イテ(II)

淡中　忠郎（東北大）

(Lemma 9) Lemma 8ト全様ニシテ

$$\left|\sum c_p f_p(x)\right| \leqq M$$

ナラバ

$$\left|\sum c_p f_p(A)\right| \leqq M$$

(Lemma 10) $\mathcal{R}_{\mathfrak{g}}$ ヲ $\mathfrak{g}$ ノスベテノ a.p. 函數ノ Ring（積ハ普通ノ積, convolution デハナイ）トスルトAハ $\mathcal{R}_{\mathfrak{g}}$ ノ一次表現ニマデ fortsetzen 出來ル。

證明：$\mathcal{R}_{\mathfrak{g}}$ ノ範囲デハ A ハ表現ニ成ツテキタ。$f(x)$ ヲ任意ノ a.p. 函數トスルト $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $h_\varepsilon(x) = \sum c_p f_p(x)$ ガ定マリ

$$\left|f(x) - \sum c_p f_p(x)\right| < \varepsilon$$

$$\left|h_\varepsilon(x) - h_{\varepsilon'}(x)\right| \leqq \left|h_\varepsilon(x) - f(x)\right|$$

$$+ \left|f(x) - h_{\varepsilon'}(x)\right| < \varepsilon + \varepsilon'$$

$$\therefore \quad \left|h_\varepsilon(A) - h_{\varepsilon'}(A)\right| \leqq \varepsilon + \varepsilon'$$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(A)$$

ガ存在スル。且ツ $h_\varepsilon(x)$ ノ取リ方ニ無関係ナコトヲ明カデアル。之ヲ $f(A)$ ト書クト

$$(\alpha\cdot f)(A)=\alpha\cdot f(A)$$

$$(f+g)(A)=f(A)+g(A)$$

$$(fg)(A)=f(A)\cdot g(A)$$

即チ $f(x)\longrightarrow \underline{f(A)}$ ＝ヨリ一次ノ表現ガエラレル。

$f(A)=0$ ナル $f(x)$ ハ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{g}}$ ノ Primideal $\mathfrak{p}(A)$ ヲ作ル．（一次ノ Primideal 即チ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{p}(A)$ ハ數体＝ナル）逆＝

（Lemma 11） $\mathfrak{R}_{\mathfrak{g}}$ ノ任意ノ（一次ノ）Primideal $\mathfrak{p}$ ヲトルト $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}(A)$ ナル $\bar{\mathfrak{g}}$ ノ表現Aアリ。

證明：コノ辺ハ Boolean Ring ＝関スル Stone ノ論文（Trans. A. M. S. Vol. 41 (1937)）ト同ジ論法ガ現ハレルガ大シテ長クナイカラ全部略サナイデ述ベテ見ル。

$f(x)\equiv c_f \pmod{\mathfrak{p}}$ ナル常數 c_f ヲ分リ易ク $f(\mathfrak{p})$ ト書ク．（代數函數ノ Riemann 面ノ点ノ定義トノ類似ヲ辿ツテ見ルト duality ノ意味ガハッキリスルヤウニ思ハレル）

先ヅ　$f(\mathfrak{p})=0$ ナラバ　$g.l.b.\,|f(x)|=0$

$\because$ モシ $|f(x)|\geq\varepsilon>0$ ナラバ $\dfrac{1}{f(x)}\in\mathfrak{R}_{\mathfrak{g}}$

$$f(x)\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

$$I=\frac{1}{f(x)}\cdot f(x)\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{矛盾}$$

一般＝ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\mathfrak{p})$ ナル $x_1, x_2, \cdots\cdots$ ノアル

コトモ

$$f(x)-f(\mathfrak{p})\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

カラ出ル。

$$f(x)=g(x)+ih(x) \quad (g, h \text{ real})$$

トスルト，上ノコトカラ $g(\mathfrak{p})$, $h(\mathfrak{p})$ ハ real

$$f(\mathfrak{p})=g(\mathfrak{p})+ih(\mathfrak{p})$$

$$\bar{f}(x)=g(x)-ih(x)$$

$$\bar{f}(\mathfrak{p})=g(\mathfrak{p})-ih(\mathfrak{p})$$

$$\therefore \quad \bar{f}(\mathfrak{p})=\overline{f(\mathfrak{p})}$$

故ニ $R_{\mathfrak{g}}$ ノミデ考ヘルト Lemma 4 ノ假定ガ滿足サレルカラ $\bar{\mathfrak{g}}$ ノ表現Aアリテ

$$f_p(\mathfrak{p})=f_p(A)$$

$\mathfrak{R}_{\mathfrak{g}}$ 迄 fortsetzen シテモ

$$f(\mathfrak{p})=f(A)$$

以上ヲ要約スルト

（定理1）$\bar{\mathfrak{g}}$ ノ Element A ト $\mathfrak{R}_{\mathfrak{g}}$ ノ一次ノ Primideal トハ一對一ノ對應ヲナス」

次ニ $\mathfrak{g}$ ガ bikompakt ノトキ双對定理ヲ証明スル。之レハ一般ノ場合 bikompakt ノトキニ双對定理ニナルヽウナ形ノ定理（定理3）ノ特別ノ場合デアルガ獨立ナ証明ヲ與ヘテ置ク。証明ハ Stone ノト同ジ。

（定理２）（ *Dualitätssatz*）

$\mathfrak{G}$ ガ *bikompakt* ナラバ $\mathfrak{G} \cong \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ 但シ $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ノ *topology* ハ *weak topology* 即チ $D_1, D_2,$ ------ D_K ヲ有限個ノ $\mathfrak{G}$ ノ表現トシ $A \subset \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ノ一ツノ *vicinity* トシテ

$$\| D_i(A) - D_i(B) \| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \text{-----}, K)$$

ナル B ノ *set* $\mathfrak{U}(A; D_1, \text{-------}, D_K; \varepsilon)$ ヲトル。

$\| \quad \|$ ハ勿論 *Matrix* ノ *Narm*，例ヘバ *von Neumann* ニ従ッテ

$$\| (C_{iK}) \| = \sqrt{|C_{11}|^2 + \text{-----} + |C_{21}|^2 + \text{-----}}$$

証明： *topology* ヲ後廻シニシテ代数的ナ *Isomorphie* カラ始メル。之レハ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ ノ *Primideal* $\mathfrak{p}$（"一次ノ" トイフ言葉ヲ省略スルコトニスル）ヲ任意ニトルト $\mathfrak{G}$ ノ適当ナ a アリ．$f(a) = 0$ ナル $f(x)$ ノ作ル *Primideal* $\mathfrak{p}(a)$ ガ $\mathfrak{p}$ ト一致スルコトヲ証明スレバヨイ。之レニハ $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}(a)$ ヲ云ヘバ充分デアル。コノ関係ガスベテノ a ニ對シテ成立シナイモノトスレバ

$$f_a(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}), \quad f_a(a) \neq 0$$

ナル $f_a(x)$ ガ $a \in \mathfrak{G}$ ニ對シテ定マル．$f_a(x) \geqq 0$ トシテモヨイ。 $\because$

$$f_a(x) \cdot \overline{f_a(x)} = |f_a(x)|^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$$

$$|f_a(x)| \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$$

ダカラ $|f_a(x)|$ ヲ始メカラ考ヘレバ充分ダカラデアル。

über all dicht ニ且ツ stetig isomorph ニ abbilden サレル。

（注意） 之ハ定理２ヲ含ム。何トナレバ $\mathfrak{G}$ ノ Bild $\tilde{\mathfrak{G}}$ ガ $\bar{\bar{\mathfrak{G}}}$ ヲ überall dicht ダカラ $\mathfrak{G}$ 從ツテ $\tilde{\mathfrak{G}}$ ガ bikompakt ナラ $\tilde{\mathfrak{G}}=\bar{\bar{\mathfrak{G}}}$，$\mathfrak{G}\to\bar{\bar{\mathfrak{G}}}$ ハ $\mathfrak{G}$，$\bar{\bar{\mathfrak{G}}}$ ガ bikompakt 且ツ一對一ダカラ逆ノ對應モ stetig トナッテ

$$\mathfrak{G}\cong\bar{\bar{\mathfrak{G}}}\ (\text{topologisch!})$$

トナル。Freudenthal. Topologische Guppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen, Annals of Math. Vol. 37 (1936) Hauptsatz VII ト関係ガアル。

（証明） $\mathfrak{G}$ ノスベテノ irreducible representation ヲ $D_1(x)$, $D_2(x)$, -------, $D_\lambda(x)$, ------ トスル。（unitary トシテモヨイ）。$\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, ------- ヲ $D_1(x)$, $D_2(x)$, ------- ト同ジ次数ノ unitary matrix ノ群トシ $\mathfrak{U}_1\times\mathfrak{U}_2\times$ ------- ヲ weak topology ヲ附ケテ考ヘル。（即チ neighborhood ハ有限個ノ Component ノ夫レノ直積）之レハヨク知ラレタヤウニ $f_a(x)$ ハ a ノアル Umgebung $\mathfrak{U}(a)$ デ >0. $\mathfrak{U}(a)$ ノ中カラ有限個ヲトリ出シテ

$$\mathfrak{U}(a_1)+\cdots\cdots+\mathfrak{U}(a_s)=\mathfrak{G}$$

ト出來ル。

$$g(x) = f_{a_1}(x) + \cdots\cdots + f_{a_s}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

$$\therefore \quad \text{g. l. b.} \quad g(x) = 0$$

$\mathfrak{G}$ bikompakt ダカラ

$$g(a_0) = 0 \qquad (a_0 \in \mathfrak{G})$$

$$\therefore \quad f_{a_1}(a_0) = f_{a_2}(a_0) = \cdots\cdots = f_{a_s}(a_0) = 0$$

従ッテ a_0 ハドノ $\mathfrak{U}(a_k)$ ニモ属シナイコトニナッテ矛盾スル。即チ

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(a) \qquad (a \in \mathfrak{G})$$

topology ノ方ハ簡単ニ証明サレルカラ略シテ置ク。

（定理 3） $\mathfrak{G}$ ガ充分澤山 a. p. 函数ヲ持テバ $\mathfrak{G}$ ハ bikompakt ナ群ノ中ニ stetig isomorph ニ abbilden サレル。（topologisch ニカドウカハ不明）更ニ精密ニ云ヘバ $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ハ weak topology ヲ與ヘルト bikompakt ニナリ $\mathfrak{G}$ ハ $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ノ中ニ bikompakt. $A \in \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ トスルト

$$A \longleftrightarrow \{ D_1(A), D_2(A), \cdots\cdots, D_\alpha(A), \cdots\cdots \}$$

デ topology ヲモコメテ $A \in \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 \times \cdots\cdots$ ト考ヘラル。$\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ハ $\mathfrak{U}$ ノ中デ closed ナルコトハ明カデアルカラ $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ハ bikompakt ナルコトガ分ッタ。

$\mathfrak{G} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{G}}$ stetig isomorph ハ明カダカラ $\tilde{\mathfrak{G}}$ ガ $\bar{\mathfrak{G}}$ デ überall dicht" ヲ証明スル。

$A \in \bar{\mathfrak{G}}$ ノ Umgebung ヲ

$$\mathfrak{U}(A ; D_{p_1}, D_{p_2}, \cdots\cdots, D_{p_s} ; \varepsilon)$$

トシ

$$\| D_{p_i}(A) - D_{p_i}(a) \| < \varepsilon \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,s)$$

ナル $a \in \tilde{\mathfrak{G}}$ ノ存在ヲ示セバヨイ。a. p. 函数

$$f(x) = \sum_i \left\| D_{p_i}(A) - D_{p_i}(x) \right\|$$

デ $f(A) = 0$

$f(A) = \lim f(a_n)$ $(a_n \in \mathfrak{G})$ ハ前ニ証明シタカラ充分大キナ n ニ対シテ $a = a_n$ トスレバ目的ガ達セラレル。

(定理4) $\mathfrak{G}$ any topological group ナラ適当ニ bicompact ナ $\mathfrak{S}$ ヲトルト

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}$$

實ハ $\bar{\bar{\mathfrak{G}}} = \mathfrak{S}$ デ間ニ合フ。

(注意) コノ定理ハ van Kampen, Ann. of Math. vol. 37 (1936) デ証明ナシニ述ベラレテ居ル。$\mathfrak{S}$ ノ作リ方ハ述ベテナイ。

Kampen ノ引用シテアル Pontrjagin ノ論文ヲヨク讀メバ分ル筈ダガ $\mathfrak{S} = \bar{\bar{\mathfrak{G}}}$ ハ可成リ具体的デハツ

キリシテ居ル様ニ思ハレル。

（証明）　$f(x)\cdot g(x)=h(x) \qquad x\in\mathfrak{g}$

ナラ　$f(A)\cdot g(A)=h(A) \qquad A\in\overline{\overline{\mathfrak{g}}}$

等。

$\overline{\overline{\mathfrak{g}}}$ ノ topolog ノ附ケ方カラ $f(A)$ ハ連続従ッテ a.p. 函数デアル。逆ニ $\overline{\overline{\mathfrak{g}}}$ ノ連続函数 $f(A)$ アレバ $x \longrightarrow \widetilde{x}$（$\widetilde{x}$ ハ x デ induzieren サレタ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ表現。$\mathfrak{g}$ ニ充分澤山 a. p. 函数ノ存在スルコトヲ假定シテナイカラ

$$x \longleftrightarrow \widetilde{x}$$

ハ分ラナイ。）ノ時

$$f(x)=f(\widetilde{x})$$

トオケバ $\mathfrak{g}$ ノ a.p. 函数ガ得ラレル。

上ノ對應デ

$$\|f(x)\|=l.u.b.\,|f(x)|=\|f(A)\|$$

$$\underset{x}{M}[f(x)]=\underset{A}{M}[f(A)]$$

等ハ今迄ノ考察カラ出ル。後者ハ

$$\left|\sum_i \alpha_i f(xa_i)-\underset{x}{M}[f(x)]\right|\leqq\varepsilon$$

$$\sum \alpha_i=1 \qquad \alpha_i\geqq 0$$

カラ

$$\left|\sum_i \alpha_i f(A_{a_i})-\underset{x}{M}[f(x)]\right|\leqq\varepsilon$$

$$\sum_i \alpha_i f(A a_i) \longrightarrow \underset{x}{\mathrm{M}}[f(x)]$$

(*uniformly in A*)

トナッテ証明サレル。